## 20　図形の性質（2）

**169**　省略

**170**

頂点 A から平面 OBC に下ろした垂線の足を H とすると，H は△OBC の外心である。

したがって，△AHO，△AHB，△AHC について，

HO＝HB＝HC　・・・①　AH は共通の辺　・・・②

∠AHO＝∠AHB＝∠AHC＝90°　・・・③

①～③より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから，△AHO≡△AHB≡△AHC

よって，AO＝AB＝AC

以下同様にして，BO＝BC＝BA，CO＝CA＝CB が成り立つ。

したがって，四面体 OABC のすべての辺の長さが等しい。

すなわち，四面体のすべての面は合同な正三角形である。

ゆえに，四面体 OABC は正四面体である。

**171**

**(1)**

図より，任意の 1 頂点に近い頂点の数は 5 ある。

したがって，$P$ は 1 頂点が 5 個の三角形で共有されている凸多面体である。

よって，$P$ の面の数を $f$ とすると，面となっている三角形の頂点の数は $3f$ だから，

$P$ の頂点の数は $\dfrac{3}{5}f$

**(2)**

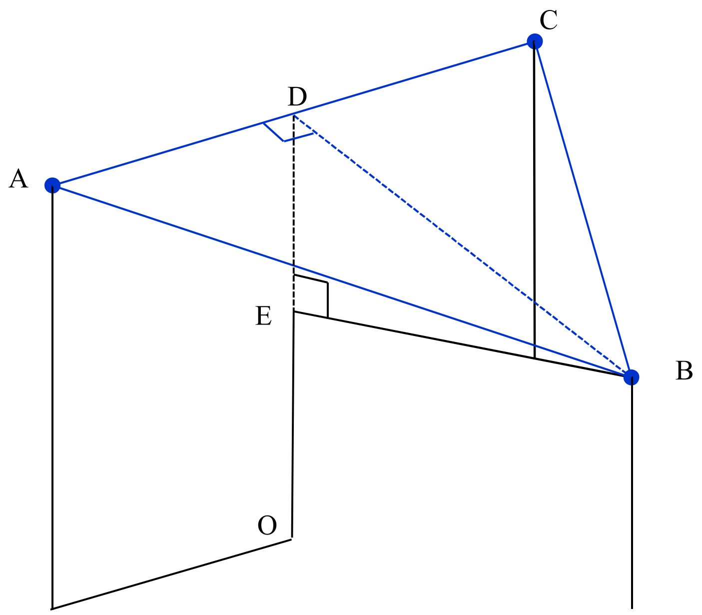
次図において，△ABC は $P$ の面だから，1 辺の長さが $b$ の正三角形である。

また，三平方の定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2\\ &= \mathrm{AD}^2+\mathrm{BE}^2+\mathrm{DE}^2\\ &= \left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+(\mathrm{DO}-\mathrm{EO})^2\\ &= \frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)^2\\ &= \frac{b^2-ab+a^2}{2}\end{aligned}$$

これと $\mathrm{AB}=b$ より，$b^2=\dfrac{b^2-ab+a^2}{2}$　$\therefore b^2\left\{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-\dfrac{a}{b}-1\right\}=0$

$a>0,\ b>0$ だから，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-\dfrac{a}{b}-1=0$ を解くことにより，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$




**172**

**(1)**

円錐の頂点と内接球の中心を通る平面で立体を切ると，切断面は下図のようになる。

O は内接球の中心, D,E,H は円錐と内接球の接点である。また, H は底面の中心でもある。

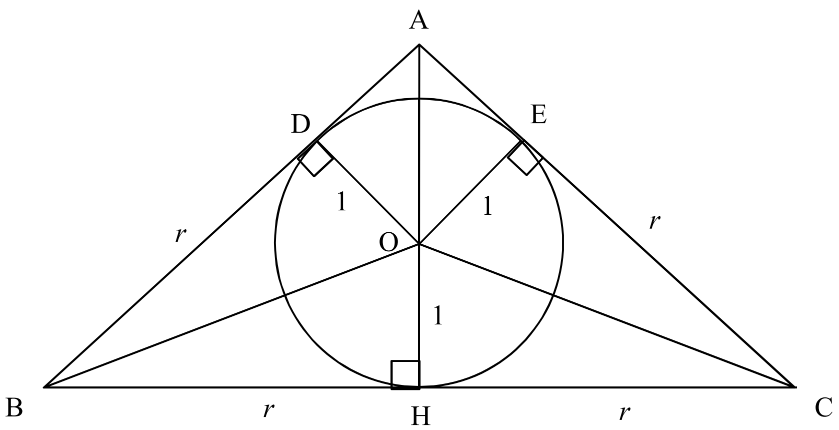
OB＝OC，AB＝AO より，A,O,H は同一直線（線分 BC の垂直二等分線）上の点である。

よって，△ABH∽△AOD より，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AO}}=\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{OD}}=\dfrac{\mathrm{HA}}{\mathrm{DA}}$ すなわち $\dfrac{r+\mathrm{AD}}{\mathrm{AO}}=\dfrac{r}{1}=\dfrac{\mathrm{AO}+1}{\mathrm{AD}}$

これより，$\begin{cases} r+\mathrm{AD}=\mathrm{AO}\cdot r \\ \mathrm{AD}\cdot r=\mathrm{AO}+1 \end{cases}$　これと $r>1$ より，$\mathrm{AD}=\dfrac{2r}{r^2-1}$　$\therefore \mathrm{AB}=r+\dfrac{2r}{r^2-1}$

円錐の側面は半径 AB，弧長 $2\pi r$ の扇形，底面は半径 $r$ の円だから，

$$S=\frac{1}{2}\left(r+\frac{2r}{r^2-1}\right)\cdot 2\pi r+\pi r^2=\frac{2\pi r^4}{r^2-1}$$



**(2)**

**解法 1**

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{2\pi r^4}{r^2-1} \\
&= 2\pi \cdot \frac{(r^2-1)^2 + 2r^2 - 1}{r^2-1} \\
&= 2\pi \cdot \frac{(r^2-1)^2 + 2(r^2-1) + 1}{r^2-1} \\
&= 2\pi\left\{(r^2-1) + \frac{1}{r^2-1} + 2\right\} \quad (\because r>1) \\
&\geq 2\pi\left(2\sqrt{(r^2-1)\cdot\frac{1}{r^2-1}} + 2\right) \\
&= 8\pi
\end{aligned}
$$

等号は$r^2-1=\dfrac{1}{r^2-1}$ $(r>1)$すなわち$r=\sqrt{2}$ のとき成立

よって，$S$ は$r=\sqrt{2}$ で最小値$8\pi$ をとる。

**解法 2**

$\dfrac{r^4}{r^2-1}=t$ $(r>1)$とおくと，$r^4=t(r^2-1)$より，$(r^2)^2-tr^2+t=0$

これを$r^2$についての 2 次方程式と見なし，その判別式を$D$とすると，

必要条件は$D=t^2-4t=t(t-4)\geq 0$

これと$t>0$ $(\because r>1)$より，$t\geq 4$

$t=4$ を①に代入すると，$(r^2)^2-4r^2+4=(r^2-2)=0$ より，$r^2=2$

よって，$r>1$を満たす$r$ すなわち$r=\sqrt{2}$ が存在する。ゆえに，$S=\dfrac{2\pi r^4}{r^2-1}\geq 8\pi$

よって，$S$ は$r=\sqrt{2}$ で最小値$8\pi$ をとる。

**173**

**(1)**

I は△ABC の内心だから，∠ABI＝∠CBI　・・・①

線分 AD は I を通るから，∠BAD＝∠CAD　・・・②

円周角の定理より，∠CAD＝∠CBD　・・・③

∠BID は△ABI の∠I の外角だから，∠BID＝∠BAD＋∠ABI

これと①，②，③より，∠BID＝∠CBD＋∠CBI＝∠DBI

よって，二等辺三角形の性質より，△DBI は DB＝DI の二等辺三角形である。

ゆえに，DB＝DI

**(2)**

△ABC の内接円と辺 AB の接点を E，直線 BO と△ABC の外接円の交点で点 B と異なる点を F とする。

△IEA と△BDF について，

∠AEI＝∠BDF＝90°　・・・④

∠EAI＝∠BAD　・・・⑤

円周角の定理より，∠BAD＝∠DFB　・・・⑥

⑤，⑥より，∠EAI＝∠DFB　・・・⑦

④，⑦より，△IEA∽△BDF

よって，$\frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{BD}}=\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{DF}}=\frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{FB}}$　すなわち $\frac{r}{\mathrm{BD}}=\frac{\mathrm{IA}}{2R}$　$\therefore \mathrm{AI}\cdot\mathrm{DB}=2Rr$

ここで，(1)より，DB＝DI

ゆえに，$\mathrm{AI}\cdot\mathrm{DI}=2Rr$

**(3)**

直線 IO と外接円の交点を PQ（PI＞QI）とすると，

$\mathrm{PI}=\mathrm{PO}+\mathrm{OI}=R+\mathrm{OI}$，$\mathrm{QI}=\mathrm{QO}-\mathrm{OI}=R-\mathrm{OI}$

方べキの定理より，$\mathrm{AI}\cdot\mathrm{DI}=\mathrm{PI}\cdot\mathrm{QI}$

また，(2)より，$\mathrm{AI}\cdot\mathrm{DI}=2Rr$

よって，$2Rr=(R+\mathrm{OI})(R-\mathrm{OI})$　$\therefore \mathrm{OI}^2=R^2-2Rr$

**174　略解**

(i) 向かい合う内角が 90° のとき

下図のように，四角形を ABCD，接点を E,F,G,H，内接円の中心を O，BE＝BF＝$a$，DG＝DH＝$b$ とすると，

四角形 ABCD＝四角形 AEOH＋四角形 EBFO＋四角形 FCGO＋四角形 OGDH

四角形 AEOH と FCGO は 1 辺の長さが 1 の正方形だから，面積は 1

また，四角形 EBFO＝2×△OEB＝$2\times\frac{1}{2}\times 1\times a=a$

四角形 OGDH＝2×△OGD＝$2\times\frac{1}{2}\times 1\times b=b$

よって，四角形 ABCD＝$1+a+1+b=2+a+b$

ここで，$a>0,\ b>0$ より，$a+b\geq 2\sqrt{ab}$（∵相加平均≥相乗平均）（$a=b$ で等号成立）

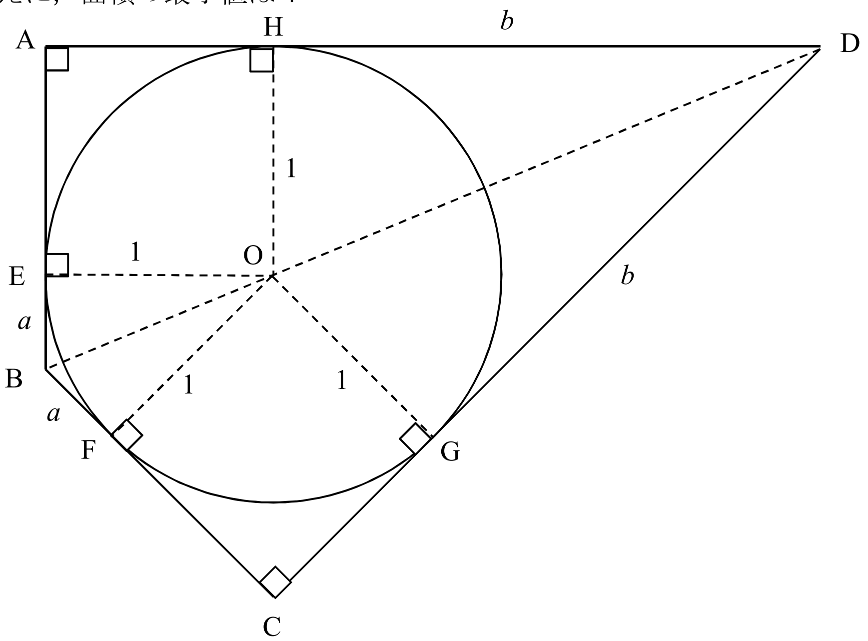
また，EO//AD より，△EOB∽△HDO　∴$\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{HO}}=\frac{\mathrm{EO}}{\mathrm{HD}}$ すなわち $\frac{a}{1}=\frac{1}{b}$　∴$ab=1$

よって，$a+b\geq 2\sqrt{ab}=2$

等号は $a=b=1$ のとき成立

よって，四角形 ABCD＝$2+a+b\geq 4$（等号は $a=b=1$ のとき成立）

ゆえに，面積の最小値は 4




(ii) 隣り合う内角が 90° のとき

同様にして，面積の最小値は 4

(i)，(ii)より，面積の最小値は 4

**175 略解**

2 円の位置関係と中心間の距離および三平方の定理より,

$\mathrm{O_3H} = \mathrm{OH} + \mathrm{OO_3}$

$\mathrm{O_3H} = \sqrt{\mathrm{O_1O_3}^2 - \mathrm{O_1H}^2} = \sqrt{(a+2a)^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a$

$\mathrm{OH} = \sqrt{\mathrm{OO_1}^2 - \mathrm{O_1H}^2} = \sqrt{(1-a)^2 - a^2} = \sqrt{1-2a}$

$\mathrm{OO_3} = 1-2a$

よって，$2\sqrt{2}a = \sqrt{1-2a} + 1 - 2a \quad \therefore 2\left(\sqrt{2}+1\right)a - 1 = \sqrt{1-2a}$ ・・・①

①の両辺を 2 乗し，整理すると，$2a\left\{2\left(3+2\sqrt{2}\right)a - \left(1+2\sqrt{2}\right)\right\} = 0$

$a > 0$ より，$a = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{2\left(3+2\sqrt{2}\right)} = \dfrac{\left(1+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}{2\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)} = \dfrac{4\sqrt{2}-5}{2}$

これは①を満たす。

よって，$a = \dfrac{4\sqrt{2}-5}{2}$